«Теория принятия решений»

Тема 3. **Оценка эффективности решений**

Лекция. **Количественная оценка эффективности решений**

Цель: Ознакомить обучаемых с основами теории полезности, как основы количественной оценки эффективности решений.

Время - 2 часа

Учебные вопросы:
1. *Сущность функции полезности*
2. *Способы построения функции полезности*
3. *Типовые функции полезности*

Введение.

1. Сущность функции полезности

При проведении оценки эффективности критерий эффективности решения является некоторой функцией или функционалом от показателей исхода операции. Прямой переход от ПИО к критерию эффективности во многих случаях затруднителен. По своей сути критерий эффективности предназначен для того, чтобы выявить порядок предпочтения на множестве решений и обеспечить обоснованный выбор решения. Предпочтения на решениях зависят от предпочтений на исходах операции. Следовательно, необходимо знать предпочтительность исходов операции. Было бы очень удобно иметь для оценки исходов какую-то единую меру.

В практике нет универсальной меры, обладающей физическим смыслом и позволяющей соизмерять исходы операций, тем более по неравномерной шкале. Поскольку же потребность в подобной мере существует, то остается ввести некую искусственную меру. Определить некоторую универсальную меру можно через *полезность исхода операции*. Заметим, что никакой исход операции не обладает полезностью сам по себе - полезности исходов могут выявляться только лицом, принимающим решение (ЛПР) на операцию в виде последовательности предпочтений.

Большинство людей использует сравнительно простой подход к оценке исходов - упорядочение по возрастанию полезности: от наименее полезных до наиболее полезных. Свое отношение к исходам человек может выразить и количественно, приписав каждому исходу некоторое число, определяющее его относительную предпочтительность. Например, наименее предпочтительный исход может быть выражен числом 1, следующий - числом 2 и т.д. до наиболее полезного исхода. Таким образом, *полезность исхода операции* - это действительное число, приписываемое исходу операции и характеризующее его предпочтительность по сравнению с другими исходами относительно цели операции.

Зная возможные исходы с их полезностями, можно построить функцию полезности, которая дает приемлемую основу для сравнения и выбора решений. Функция полезности представляет собой числовую ограниченную функцию $F(\boldsymbol{r})$, определенную на множестве исходов $R=\{\mathbf{r}_k\}(k=1,...,l)$, так что $F(\boldsymbol{r}_i) > F(\boldsymbol{r}_j)$, когда исход $\boldsymbol{r}_i$ предпочтительнее исхода $\boldsymbol{r}_j$ ($\boldsymbol{r}_i \succ \boldsymbol{r}_j$), а $F(\boldsymbol{r}_i) = F(\boldsymbol{r}_j)$, когда исходы $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{r}_j$ неразличимы - нельзя отдать предпочтение ни тому, ни другому исходу ($\boldsymbol{r}_i \sim \boldsymbol{r}_j$).

С математической точки зрения функцию полезности можно рассматривать как отображение упорядоченного множества исходов R в множество действительных чисел с с естественным упорядочением по величине. Доказывается, что при вполне естественных допущениях относительно поведения ЛПР такая функция существует. Рассмотрим некоторые допущения.

Допущение 1 (допущение измеримости). Каждому исходу r_i может быть поставлено в соответствие неотрицательное действительное число p_i, Рассматриваемое как мера относительной полезности исхода r_i (i =1,...,l).

Допущение 2 (допущение сравнимости). Любые два исхода r_i и r_j сравнимы: либо один исход предпочтительнее другого, либо исходы одинаково предпочтительны (эквивалентны). Другими словами, при сравнении двух исходов и r_j возможен один из трех выводов: предпочтительней исход r_i, в исходах и r_j нет предпочтительности, предпочтительней исход r_j.

Допущение 3 (допущение транзитивности). Соотношения предпочтения и эквивалентности исходов транзитивны. Если исход r_i предпочтительнее исхода r_j, а исход r_j предпочтительнее исхода r_k, то исход r_i также предпочтительнее исхода r_k. Аналогично, если исход r_i эквивалентен исходу r_j, а исход r_j эквивалентен исходу r_k, то исход r_i также эквивалентен исходу r_k.

Допущение 4 (допущение коммутативности). Предпочтение исхода r_i исходу r_j не зависит от порядка, в котором они названы и представлены.

Допущение 5. Если исход r_i предпочтительнее исхода r_j и, кроме того, существует исход r_k, который не оценивается относительно исходов r_i и r_j, то смесь исходов r_i и r_k предпочтительнее смеси исходов r_j и r_k. (Под смесью исходов r_m и r_n понимается исход, заключающейся в появлении одного из них с некоторой вероятностью, например исхода r_m с вероятностью p, а исхода r_n с дополнительной вероятностью 1-p.)

Для функции полезности справедливо следующее утверждение. Пусть на множестве исходов $R=\{\mathbf{r_k}\}(k=1,...,l)$ задана функция $F(r_k)$. Тогда, если a и b - произвольные постоянные величины, такие, что $a>0$, а b -действительное число, то функция $F'(r_k)=aF(r_k)+b$ является также функцией полезности. Это означает, что любое положительное линейное преобразование функции полезности не меняет отношения предпочтительности на исходах $R=\{\mathbf{r_k}\}(k=1,...,l)$. Так как функция полезности ограничена, то всегда можно подобрать такие коэффициенты a и b, с помощью которых область ее изменения приведется к интервалу [0,1]. Таким образом, функция полезности не является единственной. Причина в том, что отсутствует определение нулевой полезности, единицы полезности и шкалы полезности (их можно выбирать произвольно).

Важно подчеркнуть, что функция полезности характеризует лишь относительную, а не абсолютную предпочтительность исходов. Так, если $F'(r_1)=2$, а $F'(r_2)=1$, то отнюдь не следует, что исход r_1 всегда в два раза или на единицу предпочтительнее исхода r_2. Стоит провести линейное преобразование функции полезности, и эти значения оценок будут другими.

В зависимости от типа показателей исходов операции функция полезности может быть либо *непрерывной*, либо *дискретной*. Функцию полезности называют *прямой* в том случае, если чем больше значение показателя исхода операции, тем он полезнее и *обратной*, если чем больше значение показателя исхода операции, тем менее он полезен.

Наиболее простой вид функция полезности имеет в случае, когда исход операции характеризуется одним (скалярным) показателем. В случае векторного показателя исхода операции функция полезности становится многомерной и ее построение и использование усложняются.

Функция полезности является универсальным и весьма удобным средством математического выражения предпочтений на множестве исходов операции.

2. Способы построения функции полезности

Процедура определения функции полезности включает три основных этапа:
1) выявление показателей исходов операции;
2) определение множества допустимых исходов операции;
3) определение полезностей исходов операции.

Определение полезности как меры оценки того или иного исхода операции представляет сложную задачу, точные методы решения которой пока не найдены. Все известные способы определения функции полезности носят приближенный характер и строятся на следующих основах:

1) анализ влияния исходов исследуемой операции на операцию более высокого уровня иерархии;
2) экспертных оценок;
3) аппроксимации.

Первая группа способов основывается на моделировании и предполагает включение системы, с помощью которой реализуется исследуемая операция, как элемента в систему на один уровень выше и рассмотрение влияния на ее функционирование исходов исследуемой операции. Показатель исхода исследуемой операции будет выступать одним из управляемых параметров, описывающих вышестоящую операцию. В результате должна быть получена некоторая зависимость эффективности функционирования вышестоящей системы от интересующего нас показателя. Она и принимается в качестве функции полезности для исходов исследуемой операции.

Достоинством способа является относительно высокая объективность. Основной недостаток состоит в трудностях реализации.

Способы определения функции полезности с использованием *экспертных оценок* предполагают привлечение экспертов. Эксперт - это специалист, обладающий необходимыми и достаточными знаниями, опытом, интуицией и беспристрастностью для представления объективных заключений об исходах исследуемой операции (само слово «эксперт» имеет латинское происхождение и означает «опытный»). Известно, что практический опыт и знания людей трудно заменить дедуктивными построениями формального характера. В силу этого способам на экспертной основе присущи преимущества по сравнению с другими. Принципиально любой экспертный способ представляет собой систему непротиворечивых правил, позволяющих использовать мнения экспертов для оценки предпочтительности исходов операции.

При выполнении экспертиз в ней можно выделить следующие основные этапы:

- упорядочение множества исходов операции по их предпочтительности $(r_1 \succ r_2 \succ ... \succ r_l)$;
- определение полезности каждого исхода $F\{\mathbf{r_k}\}$ (k=1,...,l);
- проверку полученных оценок на непротиворечивость путем сравнения оценок предпочтительности полезностей исходов;
- устранение противоречий в оценках путем корректировки либо варианта упорядочения исходов, либо полезностей, либо того и другого вместе.

Экспертные способы различаются числом привлекаемых экспертов (индивидуальные и групповые), степенью учета качеств экспертов (с учетом или без учета), методикой проведения опроса (путем анкетирования, путем интервьюирования, комбинированным путем, с контактами и без контактов между экспертами, с обоснованием и без обоснования генерируемых оценок), формой получаемых оценок (с порядковыми оценками, с рангами оценками, с оценками в виде парных сравнений), методикой обработки оценок (с усреднением, на основе голосования и др.).

Наиболее просто реализуется групповая экспертиза, но ей присущ серьезный недостаток - субъективизм получаемых оценок. Групповые экспертизы значительно сложнее индивидуальных

Экспертные способы не являются строго формальными: любая экспертиза неизбежно содержит отпечаток субъективизма, вносимого как самими экспертами, так и организаторами. Это является платой за возможность получения количественных оценок там, где раньше ограничивались лишь качественным описанием. Теоретические основы экспертных способов еще недостаточно разработаны. Экспертные способы рекомендуются к использованию там, где применить моделирование не представляется возможным.

Определение функции полезности на основе аппроксимации заключается в следующем. При рассмотрении исходов конкретной операции отыскиваются характерные точки, соответствующие, например, экстремумам функции полезности, значения между ними определяются какой-то известной зависимостью. Вид зависимости выбирается на основании имеющихся сведений или качественных соображений о полезностях исходов.

3. Типовые функции полезности

Мерой количественной оценки соответствия результатов операции (решения на операцию) цели является *функция эффективности* (ФЭ) ***U(X)***, обладающая следующим свойством:

Из двух решений X_1 *и* X_2 *предпочтительным является то, при котором значение функции эффективности больше, т.е.* $X_1 \succ X_2$ *(*X_1 *предпочтительнее* X_2*), тогда и только тогда, когда* $U(X_1) > U(X_2)$.

Переход от ПИО и распределения вероятностей к функции эффективности осуществляется с помощью **функции полезности** (ФП), являющейся моделью предпочтений ЛПР к различным исходам операции (вариантам построения системы).

В общем виде функция эффективности определяется следующим образом:

а) для *дискретных* ПИО:

$$U(X) = \sum_R F(R)P(R / X);$$

б) для *непрерывных* ПИО:

$$U(X) = \int_R F(R)f(R / X)dR,$$

где $F(R)$ - функция полезности, заданная на множестве значений ПИО R.

Определение функции эффективности в представленном виде практически невозможно, т.к. для этого необходимо построить многомерную функцию полезности, а также найти либо многомерное распределение вероятностей на множестве составляющих ПИО, либо многомерную функцию плотности.

Поэтому используется соотношение вида $U(X) = \Psi\{U_i(X)\}$, где $U_i(X)$ - функция эффективности по i-му свойству, которая является **показателем эффективности** (ПЭ) системы.

Таким образом, показатель эффективности отражает:

1) исход реализуемой операции (через значение ПИО);

2) тип операции (через распределение вероятностей на множестве значений ПИО);

3) систему предпочтений ЛПР (через функцию полезности).

В вероятностных операциях в качестве показателя эффективности принимается *математическое ожидание функции полезности*:

а) для *дискретных* составляющих ПИО

$$U_i(X) = \sum_{r_i} F(r_i)P(r_i / X);$$

б) для *непрерывных* составляющих ПИО

$$U_i(X) = \int_{r_i} F(r_i)f(r_i / X)dr_i.$$

Наибольшее практическое применение при задании ФП нашел способ *аппроксимации* пороговой (одноступенчатой) и линейной зависимостями (рис.1 и 2 соответственно).

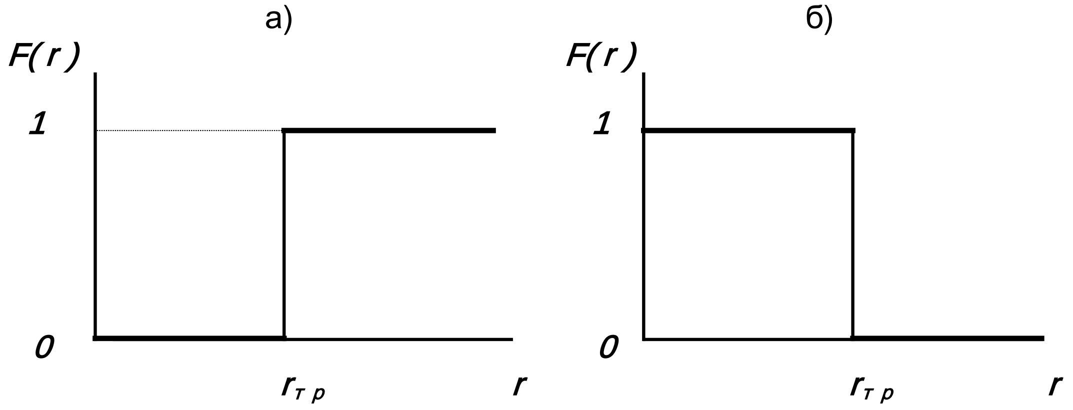

Рис. 1. Пороговая функция полезности

Значение показателя эффективности для вероятностной операции с *пороговой функцией полезности* определяется как **вероятность попадания значения составляющей r в область допустимых R** ($r \geq r_{тр}$ или $r \leq r_{тр}$ соответственно). Для варианта (рис.1.а) аналитическое выражение функции полезности определяется как:

$$F(r) = \begin{cases} 1, & при\ r \geq r_{тр}; \\ 0, & при\ r < r_{тр}, \end{cases}$$

а показатель эффективности будет равен:

$$U(X) = \int_0^{\infty} F(r)\, f(r/X)\, dr = \int_0^{r_{тр}} 0 \times f(r/X) + \int_{r_{тр}}^{\infty} 1 \times f(r/X) = \int_{r_{тр}}^{\infty} 1 \times f(r/X) = P(r \geq r_{тр}).$$

Аналогично, для варианта (см. рис.1.б):

$$F(r) = \begin{cases} 1, & при\ r \leq r_{тр}; \\ 0, & при\ r > r_{тр}, \end{cases}$$

можно показать, что

$$U(X) = P(r \leq r_{тр}).$$

Пример. Предполагается, что для принятия решения по управлению подчиненными объектами должностному лицу необходимо проанализировать результаты решения нескольких вариантов задачи на ЭВМ. Время решения задачи $t_р$ выступает одной из составляющих показателя исхода операции, зависит от многих факторов и является случайной величиной. Допустим, что оно не должно превышать ***3 мин***. Любая задержка в выдаче результата может привести к несвоевременной выработке управляющего воздействия. Получение результата за меньшее время не является определяющим, т.к. должностное лицо не сможет начать его анализ до завершения рассмотрения предыдущего. Таким образом, превышение заданного времени решения приводит к нулевой полезности получения результата, в то время как полезность других исходов максимальна. Функция полезности считается пороговой. Поэтому в качестве показателя эффективности следует принять вероятность решения задачи за ***3 мин*** $P(t_р \leq 3мин)$.

В вероятностной операции с *линейной функцией полезности* показатель эффективности определяется как **математическое ожидание составляющей r**.

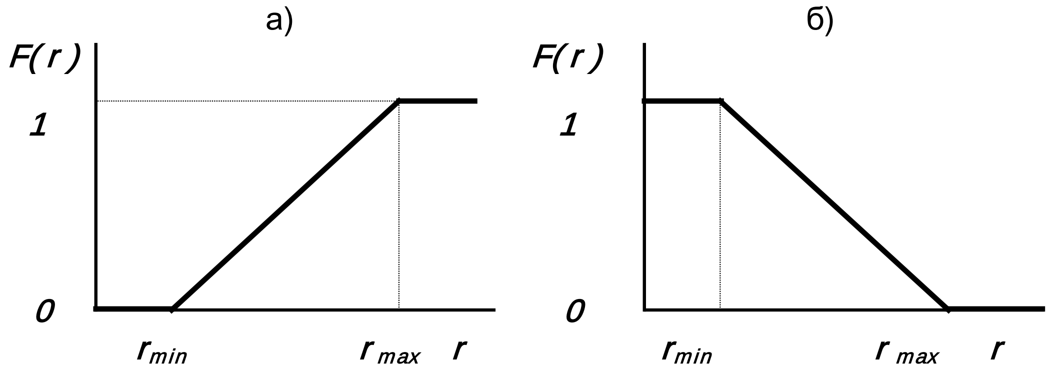

Рис. 2. Линейная функция полезности

Например, в случае (рис.2.а) аналитическое выражение функции полезности имеет вид:

$$F(r)=\begin{cases} 0, & при\ r \le r_{min}; \\ \dfrac{r-r_{min}}{r_{max}-r_{min}}, & при\ r_{min} < r < r_{max}; \\ 1, & при\ r \ge r_{max}. \end{cases}$$

При переходе к выражению для определения показателя эффективности следует преобразовать исходную функцию полезности к виду:

$$F(r)=\frac{r}{r_{max}-r_{min}}-\frac{r_{min}}{r_{max}-r_{min}}.$$

Введем обозначения:

$$a=\frac{1}{r_{max}-r_{min}}; \quad b=\frac{r_{min}}{r_{max}-r_{min}}.$$

Функция полезности определится как $F(r)=ar-b.$ Принимая коэффициенты $\boldsymbol{a}$ = **1** и $\boldsymbol{b}$ = **0**, получим эквивалентную функцию $F(r)=r.$ Действительно, подобное линейное положительное преобразование функции полезности не изменяет предпочтений на множестве значений $\boldsymbol{r}$.

Тогда показатель эффективности определяется соотношением:

$$F(r)=\int_{r_{min}}^{r_{max}} F(r)\ f(r\,/\,X)dr=\int_{r_{min}}^{r_{max}} r\ f(r\,/\,X)dr=M[r],$$

где $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{r}]$ - математическое ожидание составляющей ПИО $\boldsymbol{r}$.

Соответственно, для варианта (см. рис.2.б) функция полезности описывается выражением:

$$F(r)=\begin{cases} 1, & при\ r \ge r_{max}; \\ \dfrac{r_{max}-r}{r_{max}-r_{min}}, & при\ r_{min} < r < r_{max}; \\ 0, & при\ r \le r_{min}. \end{cases}$$

Соотношение для определения показателя эффективности останется прежним.

Пример. Изменим характер отношения к времени выдачи результатов решения задачи (см. предыдущий пример). Считается, что чем раньше получено решение, тем выше его значимость. В этом случае функция полезности может быть аппроксимирована линейно-убывающей зависимостью. Тогда показатель эффективности необходимо определить как среднее время решения задачи ($\boldsymbol{M}$ [$\boldsymbol{t_p}$]).

Нормирование математического ожидания относительно максимального (минимального) значения составляющей ПИО позволяет перейти к коэффициентному исчислению соответствующего показателя эффективности.